

تبدیل زمان کل آزمون در سنجش نابرابری درآمد

مجتبی اصفهانی

دانشجوی دکتری آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

m.esfahani@mail.um.ac.ir

غلامرضا محتشمی برزادران (نویسنده مسئول)

استاد گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

grmohtashami@um.ac.ir

محمد امینی

استاد گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

m-amini@um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۸

چکیده:

توزیع مناسب ثروت در جامعه از مسائل مهم و تاثیرگذار در ایجاد ثبات اقتصادی و اجتماعی آن جامعه است. به همین منظور بررسی رفتار توزیع درآمد در یک جامعه از اهمیت زیادی برخوردار است و برای این امر تاکنون شاخص‌های زیادی معرفی و عملکرد آنها از لحاظ دقت مورد مقایسه قرار گرفته است. هدف اصلی این پژوهش معرفی تبدیل زمان کل آزمون (TTT^۱) و نمودار متناظر آن به عنوان یک شاخص مطلوب برای سنجش نابرابری درآمد و مقایسه آن با شاخص‌های لورنتس^۲ و زنگا^۳ است. برای تجزیه و تحلیل این شاخص از ریز داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۰ استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که تبدیل TTT عملکردی شبیه شاخص زنگا دارد و در مقایسه با تبدیل لورنتس عملکرد بهتری در نشان دادن نابرابری درآمد دارد. همچنین در بخش پایانی با استفاده از توابع تغییرشکل^۴ یک مدل تغییرشکل یافته جدید را معرفی و با در نظر گرفتن توزیع‌های پایه درآمد، تعمیمی از این توزیع‌ها را ارائه و برخی ویژگی‌ها و برآورد درستی ماکسیمم پارامترهای هر مدل را به‌دست می‌آوریم. علاوه بر این، برازندگی توزیع‌های جدید به داده‌های درآمد شهروندان در تگزاس، (آرنولد ۱۹۸۳)، و داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال ۱۳۹۵ از نتایج دیگر این مقاله می‌باشند.

طبقه‌بندی *JEL*: D63، D31، D30، C16.

کلیدواژه‌ها: تبدیل TTT، نابرابری درآمد، نمودار TTT، منحنی لورنتس، تابع تغییر شکل

¹. Total Time on Test

². Lorenz

³. Zenga

⁴. Distortion functions

۱. مقدمه و پیشینه تحقیق

یکی از مولفه های اصلی و مهم برای پیشرفت و ثبات اجتماعی در یک جامعه توزیع عادلانه ثروت و درآمد در بین افراد آن جامعه است. توزیع نامناسب ثروت به مرور باعث به وجود آمدن اختلاف طبقاتی و ناهنجاری های اجتماعی در جامعه خواهد شد. به همین سبب اطلاع از نحوه توزیع درآمد در بین اقشار مختلف مردم، یکی از مسائل بسیار مهمی است که همواره توسط دولتمردان، اقتصاددانان و فعالان حقوق اجتماعی پیگیری و مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد. بنابراین یافتن شاخص هایی که نشان دهنده میزان نابرابری درآمد است از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. یکی از اولین شاخص های نابرابری درآمد منحنی لورنتس است که توسط لورنتس (۱۹۰۵) در رساله دکترایش معرفی شد. در سال ۱۹۱۲ کوواردو جینی^۱ با استفاده از منحنی لورنتس ضریب جینی را به عنوان یک شاخص اقتصادی برای سنجش نابرابری اقتصادی معرفی نمود. سپس کارلو بن فرونی^۲ (۱۹۳۰) به کمک منحنی لورنتس دیگری را با عنوان منحنی بن فرونی معرفی کرد که در اندازه گیری نابرابری های اقتصادی کاربرد داشت. پس از آن تایل^۳ (۱۹۶۷) شاخص جدیدی بر اساس آنتروپی معرفی نمود و در سال ۱۹۷۰ آتکینسون^۴ یک شاخص دیگر بر اساس تابع رفاه اجتماعی معرفی نمود که نسبت به درآمدهای پایین حساسیت بیشتری نشان می داد. زنگا (۱۹۸۴) نیز یک شاخص بر اساس چندک گشتاور مرتبه اول ناقص و چندک توزیع درآمد معرفی نمود. سپس زنگا (۲۰۰۷) بر اساس مقایسه میانگین درآمدهای پایین جامعه نسبت به میانگین درآمدهای بالای جامعه معرفی کرد.

ابونوری و اسنوندی (۱۳۸۴) یک مطالعه جامع در برآورد و ارزیابی سازگاری شاخص های نابرابری اقتصادی با استفاده از ریزداده های ایران انجام داده اند. مقایسه روش های پارامتریک و ناپارامتریک در محاسبه ضریب جینی توسط ابونوری و مک کلوگان (۲۰۰۰) صورت گرفته است. یک روش جدید برای برآورد ضریب جینی به ویژه برای اطلاعات گروه های طبقه بندی شده در k طبقه، بدون انتها و بدون اطلاعات درباره میانگین درآمدهای طبقات نیز توسط ابونوری (۲۰۰۳) ارائه شده است. همچنین مقایسه نابرابری درآمد با روش های پارامتریک و ناپارامتریک توسط ابونوری و ذوقی (۱۳۹۲) و ارتباط بین ساختار تولید و توزیع درآمد توسط ابونوری و فراهتی (۱۳۹۴) بیان شده است. ویژگی هایی از تبدیل لورنتس

1. Gini

2. Bonferroni

3. Theil

4. Atkinson

را نیز بهدانی و محتشمی برزادران (۱۳۹۱) و بهدانی و همکاران (۱۳۹۴) مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند. خراشادی زاده و همکاران (۱۳۹۳) و میرزایی و همکاران (۱۳۹۷) نیز شاخص زنگا را به عنوان معیاری برای سنجش نابرابری درآمد مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند.

یکی دیگر از ابزارهای مهم که کاربرد فراوانی در بیشتر مباحث قابلیت اعتماد از جمله طول عمر سیستم‌ها، سانسورها، بیمه و همچنین مفاهیم ثروت و علم اقتصاد دارد مفهوم زمان کل آزمون است که برای اولین بار توسط اپستاین و سوبل (۱۹۵۳) در معرفی برخی آزمون‌ها مورد بررسی قرار گرفت. سپس بارلو و داکسوم (۱۹۷۲) و بارلو و همکاران (۱۹۷۲) این مفهوم را به طور دقیق مورد مطالعه قرار دادند. تبدیل TTT و همچنین نمودار آن از ابزارهای شناخته شده برای تجزیه و تحلیل داده‌های نامنفی در قابلیت اعتماد، اقتصاد و ارزیابی ریسک، و نابرابری‌های درآمد هستند. نمودار TTT یک معیار مفید در انتخاب مدل مناسب برای داده‌ها و همچنین اطلاع درباره رفتار نرخ شکست داده‌ها است. برای مطالعه بیشتر به بارلو و کامپو (۱۹۷۵) مراجعه شود. در ادامه خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده بر روی این تبدیل در زمینه اقتصاد بیان می‌شود.

ارتباط تبدیل TTT با منحنی لورنتس، ضریب جینی و مفاهیم اقتصادی توسط فام و تارکان (۱۹۹۴)، پرز و همکاران (۱۹۹۷)، کیاج (۱۹۹۹) و کاوزاک و همکاران (۲۰۰۹) مورد مطالعه قرار گرفت. ترتیب‌های تصادفی TTT و فزونی ثروت (EW^1) و ارتباط بین آنها توسط کوچار و همکاران (۲۰۰۲) و لی و شیکد (۲۰۰۴) بیان شده‌است. لی و شیکد (۲۰۰۷) با معرفی یک خانواده از ترتیب‌های تصادفی، تعمیم ترتیب زمان کل آزمون (GTTT) را بیان و ویژگی‌ها و ارتباط آن با سایر ترتیب‌های تصادفی و کاربرد آن در قابلیت اعتماد و بیمه را به دست آوردند. در ادامه مطالعه در این زمینه اسپیری (۲۰۱۷) برآورد TTT برای نمونه‌های بزرگ را به دست آورده‌است و ریزوان و همکاران (۲۰۱۸) نیز با استفاده از ویژگی‌های تبدیل EW برخی از رده‌های سالخوردگی و طول عمر را مشخصه‌سازی کرده و ویژگی‌های آنها را به دست آورده‌اند.

یکی از مسائل مورد علاقه محققان و پژوهشگران جستجو و مطالعه برای پیدا کردن مدل‌های جدید از توزیع‌ها یا تعمیم توزیع‌های شناخته شده به منظور توصیف بهتر داده‌ها و مدل‌بندی آنها است. روش‌های مختلفی برای ساخت توزیع‌های جدید وجود دارد که

¹. Excess Wealth

می‌توان به روش تبدیل، ترکیب دو یا چند متغیر و استفاده از تابع تغییر شکل یافته^۱ اشاره کرد. تابع تغییر شکل بر اساس دو دیدگاه برای تعیین یک کلاس خاصی از توابع تعریف شده است. یکی از این دیدگاه‌ها بر اساس اصول ریاضیات و دیگری بر اساس عدم حتمیت در نظریه اقتصاد تبیین شده است. دیدگاه اول توسط وانگ (۱۹۹۷) و دیدگاه دوم توسط یاری (۱۹۸۷) ارائه شده است که کاربرد فراوانی در اقتصاد و بیمه دارد. از معروف‌ترین توزیع‌های آماری نیز که در مباحث اقتصادی و مدل‌بندی داده‌های اقتصادی نیز کاربرد فراوانی دارند می‌توان از توزیع‌های پارتو، خانواده بور، داگوم، لجستیک، لگ‌نرمال، گامای تعمیم‌یافته، بتای تعمیم‌یافته و وایبول نام برد. کلیپر و کاتس (۲۰۰۳)، آرنولد (۱۹۸۳) و مورتی و همکاران (۲۰۰۴) از مراجع کامل و مناسب در این زمینه هستند.

در بخش ۲ تعریف برخی از معروف‌ترین شاخص‌های سنجش نابرابری درآمد، ویژگی‌ها و ارتباط آن‌ها با یکدیگر بیان می‌شود. معرفی تبدیل TTT به عنوان یک ابزار برای سنجش نابرابری درآمد، بررسی ویژگی‌ها و ارتباط آن با سایر شاخص‌های سنجش نابرابری درآمد در بخش ۳ انجام می‌شود. در ادامه ویژگی‌ها و کاربرد نمودار TTT و تفسیر آن در اقتصاد و سنجش نابرابری اقتصادی بیان و نحوه رسم آن بر اساس برگمن و کلفسجو (۲۰۱۴) ارائه و با بررسی ویژگی‌های اصلی یک شاخص سنجش نابرابری برای این نمودار نشان داده می‌شود که می‌توان این نمودار را به عنوان یک شاخص سنجش نابرابری اقتصادی در نظر گرفت. سپس در بخش ۴ داده‌های هزینه و درآمد خانوارهای ایرانی در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵ تحلیل شده و رفتار نمودارهای TTT، لورنتس و زنگا برای این داده‌ها مقایسه و نشان داده می‌شود که نمودار TTT عملکرد بهتری برای سنجش وجود نابرابری اقتصادی دارد. در پایان نیز یک خانواده جدید از توزیع‌های تغییر شکل یافته برای تحلیل داده‌های اقتصادی معرفی و عملکرد آن در برازندگی به این داده‌ها بر اساس معیارهای AIC^2 ، $CAIC^3$ ، BIC^4 و $HQIC^5$ و همچنین آماره P ارزیابی می‌شود. تجزیه و تحلیل‌های مورد نیاز با استفاده از نرم‌افزار R انجام گرفته است.

¹. Distorted function

². Akaike information criterion

³. Conditional akaike information criterion

⁴. Bayesian information criterion

⁵. Hannan–Quinn information criterion

۲. مبانی نظری تحقیق

برای بررسی نحوه توزیع درآمد و سنجش نابرابری اقتصادی در یک جامعه تاکنون شاخص‌های زیادی معرفی شده و ویژگی‌های آنها مورد بررسی قرار گرفته‌است. از مهم‌ترین این شاخص‌ها می‌توان شاخص‌های لورنتس، بن‌فرونی، زنگا، لیمکوهلر^۱ و ضرایب جینی، پترا^۲ و تایل را نام برد که در ادامه به طور خلاصه به معرفی، بیان ویژگی‌های این شاخص‌ها و همچنین ارتباط آنها با یکدیگر می‌پردازیم.

۲-۱. شاخص‌های اقتصادی

یکی از شاخص‌های پرکاربرد در اقتصاد شاخص لورنتس است که توسط ماکس اوتو لورنتس در سال ۱۹۰۵ به صورت یک منحنی کمان شکل (محدب) که در زیر قطر مربع واحد قرار دارد، معرفی شد و در نابرابری‌های اقتصادی کاربرد فراوانی دارد به طوری که هر چه کمان بیشتر خم شود میزان نابرابری اقتصادی بیشتر است.

تعریف ۲-۱. فرض کنید درآمد افراد در جامعه یک متغیر تصادفی نامنفی با توزیع F و میانگین μ باشد. در این صورت

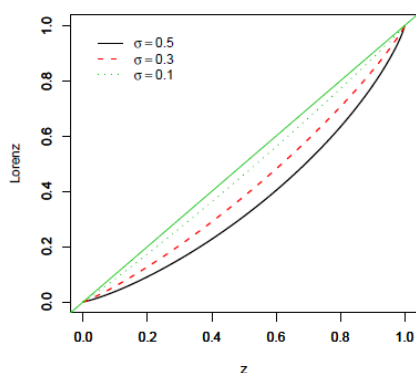
$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p Q(u) du. \quad 0 \leq p \leq 1. \quad Q(u) = F^{-1}(u). \quad (1)$$

که در آن $L(p)$ را منحنی لورنتس توزیع F نامیده و $F^{-1}(u)$ نیز تابع معکوس تابع توزیع F است که تابع چندک نامیده می‌شود و μ نیز امید ریاضی متغیر تصادفی X است. با انجام یک محاسبه ساده $Q(p) = \mu L'(p)$ به دست می‌آید. منحنی لورنتس یک منحنی محدب، پیوسته و صعودی در بازه $[0,1]$ است و $L(0)=0$ ، $L(1)=1$ و برای $0 \leq p \leq 1$ ، همواره $L(p) \leq p$. اگر درآمد تمام افراد جامعه یکسان باشد منحنی لورنتس منطبق بر خط نیمساز مربع واحد خواهد بود و حالت تساوی رخ می‌دهد. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب نمودار تبدیل لورنتس را برای داده‌هایی از توزیع لگ نرمال با پارامترهای مختلف نشان می‌دهند.

شکل ۱: نمودار لورنتس توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$

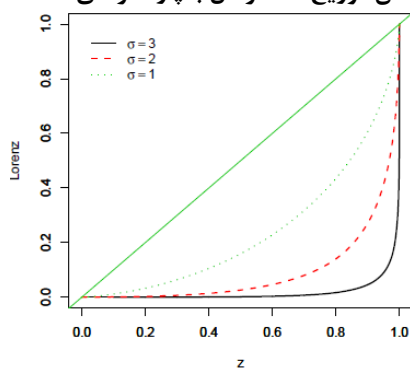
¹. Leimkuhler

². Petra



منبع: محاسبات تحقیق با نرم افزار R

شکل ۲: نمودار لورنتس توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma = 1, 2, 3$



منبع: محاسبات تحقیق با نرم افزار R

این منحنی دارای ویژگی‌های حساسیت به افزودن مقدار ثابت به درآمدها و همچنین عدم حساسیت به تغییر متناسب همه درآمدها است. یعنی اگر به درآمد تمام افراد جامعه مقدار ثابت $a > 0$ اضافه شود، در میزان نابرابری درآمد تغییر ایجاد می‌شود و باعث کاهش آن می‌شود. همچنین اگر درآمد تمام افراد جامعه متناسب با مقدار مثبت c تغییر کند، در میزان نابرابری درآمد جامعه هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود. برقراری ویژگی حساسیت به افزودن مقدار ثابت به درآمدها را در شکل ۳ که نمودار لورنتس داده‌هایی از توزیع لگ نرمال می‌باشد، مشاهده می‌شود.

ضرایب جینی و پترا نیز که از شاخص‌های آماری برای سنجش میزان نابرابری توزیع درآمد هستند به ترتیب در جینی (۱۹۱۲) و پیترا (۱۹۱۵) معرفی و مورد بررسی مطالعه قرار گرفته‌اند. این دو ضریب که با استفاده از تبدیل لورنتس به دست می‌آیند به ترتیب عبارتند از:

$$G = \int_0^1 [u - L(u)] du = 1 - 2 \int_0^1 L(u) du. \quad (2)$$

$$P = \frac{1}{\mu} \int_0^{F(\mu)} (\mu - Q(p)) dp = F(\mu) - L(F(\mu)). \quad (3)$$

منحنی لیمکوهلر نیز که به وسیله منحنی لورنتس به دست می‌آید نیز می‌تواند به عنوان یک شاخص اقتصادی برای سنجش نابرابری درآمد مورد استفاده قرار بگیرد.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{\mu} \int_{1-p}^1 Q(u) du = 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{1-p} Q(u) du \\ &= 1 - L(1-p). \quad 0 \leq p \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

کارلو بن فرونی (۱۹۳۰) نیز برای بررسی نابرابری درآمد به کمک منحنی لورنتس معیاری را با عنوان منحنی بن فرونی معرفی نمود که با نماد $B(p)$ نشان داده می‌شود.

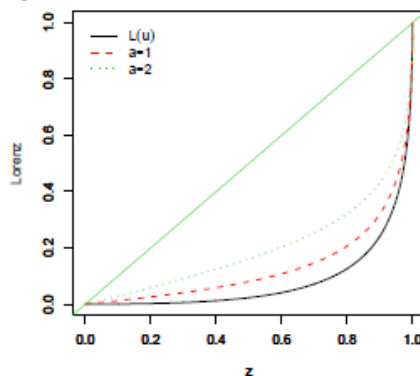
$$B(p) = \frac{1}{u\mu} \int_0^p F^{-1}(u) du = \frac{L(p)}{p}. \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (5)$$

ضریب بن فرونی نیز به صورت $B = 1 - \int_0^1 B(p) dp$ بیان می‌شود و همواره $B \leq \frac{1+G}{2}$ منحنی بن فرونی معرفی شده در (۵) در مقایسه با منحنی لورنتس حساسیت بیشتری نسبت به درآمدهای پایین دارد و در بقیه ویژگی‌ها کاملاً مشابه منحنی لورنتس است. واضح است که همواره $L(p) \leq B(p)$.

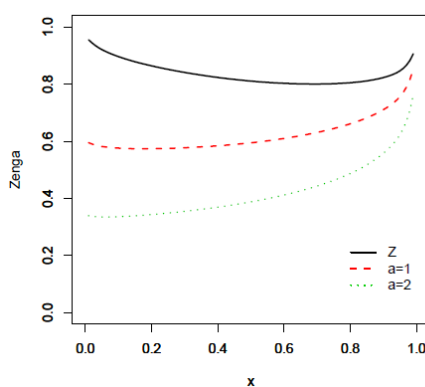
از دیگر شاخص‌های پرکاربرد در نابرابری‌های اقتصادی می‌توان از شاخص زنگا نام برد. این شاخص ابتدا توسط زنگا (۱۹۸۴) بر اساس چندک‌های توزیع درآمد بیان و سپس در زنگا (۲۰۰۷) بر اساس مقایسه میانگین درآمدهای بالا و پایین جامعه ارائه شده و با $Z(p)$ نشان داده می‌شود. منحنی زنگا نیز همانند منحنی لورنتس دارای ویژگی‌های حساسیت به افزودن مقدار ثابت به درآمدها و همچنین عدم حساسیت به تغییر متناسب همه درآمدها است. و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Z(p) = 1 - \frac{L(p)}{p} \frac{1-p}{1-L(p)}. \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (6)$$

شکل ۴ برقراری ویژگی حساسیت به افزودن مقدار ثابت به درآمدها را در نمودار زنگا برای داده‌هایی از توزیع لگ نرمال نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش درآمد ثابت باعث کاهش مساحت زیر نمودار زنگا و در نتیجه کاهش نابرابری درآمد خواهد شد.

شکل ۳: نمودار لورنتس برای توزیع لگ نرمال و تبدیل مکانی با $a = 1.2$ 

منبع: محاسبات تحقیق با نرم افزار R

شکل ۴: نمودار زنگا برای توزیع لگ نرمال و تبدیل مکانی با $a = 1.2$ 

منبع: محاسبات تحقیق با نرم افزار R

شاخص تایل نیز بر اساس آنتروپی به صورت $T = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mu} \log\left(\frac{x}{\mu}\right) p(x) dx$ تعریف می‌شود که در آن $p(x)$ تابع احتمال توزیع درآمد است. اوانشی و پیرجول (۲۰۱۹) یک کران پایین بر اساس ضریب جینی برای شاخص تایل به دست آورده‌اند که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T \geq \frac{e^{\alpha}(\alpha - 1) + 1}{e^{\alpha} - 1} + \log\left(\frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1}\right)$$

که در آن α از رابطه $\frac{e^{\alpha} - 1 - \alpha}{\alpha(e^{\alpha} - 1)} = \frac{1}{2}(1 - G)$ به دست می‌آید.

۳. شاخص نابرابری زمان کل آزمون

در این بخش تبدیل‌های TTT و EW معرفی و برخی ویژگی‌ها و ارتباط آنها با یکدیگر بیان می‌شود. سپس نحوه به‌دست آوردن تبدیل TTT بر اساس داده‌های یک نمونه تصادفی و تفسیر آن بر اساس داده‌های درآمد و همچنین ارتباط این تبدیل با سایر شاخص‌های نابرابری معرفی شده در بخش ۲ ارائه می‌شود. در ادامه با معرفی نمودار TTT به عنوان یک شاخص برای سنجش نابرابری اقتصادی، نحوه رسم این نمودار و برقراری ویژگی‌های اصلی یک شاخص سنجش نابرابری درآمد از جمله انعطاف پذیری، حساسیت نسبت به افزودن مقدار ثابت به درآمد افراد و عدم حساسیت نسبت به تغییر متناسب درآمد همه افراد جامعه، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۱. تبدیل TTT

ابتدا تبدیل‌های TTT و EW بر اساس کوچار و همکاران (۲۰۰۲) معرفی و در ادامه ارتباط این دو تبدیل با یکدیگر و همچنین ویژگی‌هایی از آنها بیان می‌شود.

تعریف ۳-۱. فرض کنید F یک توزیع درآمد با میانگین متناهی μ باشد. در این صورت تبدیل‌های TTT و EW مرتبط با توزیع F را به ترتیب با H_F^{-1} و W_F نشان داده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_F^{-1}(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(s) ds. \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (7)$$

$$W_F(p) = \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(s) ds. \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (8)$$

با توجه به فرضیات تعریف ۳-۱ تبدیل TTT مقیاسی با $\varphi(p)$ و تبدیل EW مقیاسی با $\psi(p)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود (بارلو و کامپو ۱۹۷۵):

$$\varphi(p) = \frac{H_F^{-1}(p)}{\mu}. \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (9)$$

$$\psi(p) = \frac{W_F(p)}{\mu}. \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (10)$$

با انجام محاسباتی ساده می‌توان نشان داد که $H_F^{-1}(p) = \mu - W_F(p)$ و در نتیجه $\varphi(p) = 1 - \psi(p)$.

فرض کنید $Y = \Phi(X)$ تابعی از متغیر تصادفی X باشد، کوچار و همکاران (۲۰۰۲) تبدیل زمان کل آزمون را برای $Y_1 = aX$ و $Y_2 = X + a$ برای $a > 0$ به دست آورده و نشان دادند که $H_{aX}^{-1}(p) = aH_X^{-1}(p)$ و همچنین $H_{X+a}^{-1}(p) = H_X^{-1}(p) + a$.

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تبدیل $\varphi(p)$ معرفی شده در (۹) یک تبدیل صعودی و پیوسته در بازه $[0, 1]$ است و $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(1) = 1$.
 فرناندز و همکاران (۱۹۹۸) نشان دادند که برای توزیع F با $F(0^-) = 0$ و میانگین متنه‌ای μ روابط $CV^2(X) = \int_0^1 \left[\frac{\psi(p, F)}{1-p} \right]^2 dp$ و $Var(X) = \int_0^1 \left[\frac{W(p, F)}{1-p} \right]^2 dp$ برقرار است که در آن $CV(X)$ ضریب تغییرات متغیر تصادفی X است.

۲-۳. توزیع نمونه‌ای

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد تبدیل TTT برای تحلیل داده‌های طول عمر مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال این سوال مطرح می‌شود که اگر داده‌های درآمد افراد را در اختیار داشته باشیم چگونه می‌توان این داده‌ها را بر اساس تبدیل TTT تحلیل کرد؟
 فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n داده‌های درآمد حاصل از یک نمونه تصادفی با حجم n باشد. در این صورت $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ داده‌های مرتب شده این نمونه می‌باشند. اگر هر کدام از $x_{(i)}$ را در نظر بگیریم بدیهی است که درآمد $n-i$ تا از اعضای نمونه از آن بیشتر و درآمد $i-1$ تا از اعضای نمونه کمتر از آن خواهد بود. در این صورت آماره‌ی زمان کل آزمون در لحظه i ام $(x_{(i)})$ نشان‌دهنده مجموع درآمد افراد تا رسیدن به مقدار $x_{(i)}$ است و تبدیل TTT در نقطه p میانگین درآمد افراد مورد بررسی، تا هنگامی که درآمد p درصد از کل افراد بررسی شده باشد، است.

تعریف ۲-۳. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی و $X_{(r)}$ آماره مرتب شده مرتبه r باشد. در این صورت آماره زمان کل آزمون در بازه $(0, t)$ با نماد $\tau(t)$ نشان داده می‌شود که در آن $X_{(r)} < t \leq X_{(r+1)}$.

$$\tau(t) = nX_{(1)} + (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}) + \dots + (n-r+1)(X_{(r)} - X_{(r-1)}) + (n-r)(t - X_{(r)}). \quad (11)$$

بارلو و همکاران (۱۹۷۲) نشان دادند که متغیرهای تصادفی $X_{(1)}$ و $X_{(2)} - X_{(1)}$ و ... و $t - X_{(r)}$ در رابطه (۱۱) تواما مستقل هستند. همچنین یک برآورد ناپارامتری برای تبدیل $H_F^{-1}(p)$ به صورت زیر معرفی کردند:

$$\hat{H}_F^{-1}(p) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} npX_{(1)}, \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n}[nX_{(1)} + \dots + (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})] \\ + (p - \frac{i}{n})(n-i)(X_{(i+1)} - X_{(i)}), \quad \frac{i}{n} \leq p \leq \frac{i+1}{n}, 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right. \quad (12)$$

کوچار و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند که تبدیل فزونی ثروت در نقطه p نشان‌دهنده میزان ثروت اضافی $100(1-p)$ درصد از ثروتمندترین افراد جامعه است که ثروت اضافی، حداقل $100p$ درصد از درآمد شخص می‌باشد. همچنین تبدیل TTT نیز در نقطه p نشان‌دهنده میانگین درآمد افراد مورد مطالعه تا زمان بررسی درآمد $100p$ درصد از افراد نمونه است. به عنوان مثال اگر بخواهیم نحوه توزیع درآمد ۱۰۰ نفر را مورد مطالعه قرار دهیم، H_F^{-1} در نقطه $0/3$ برابر میانگین درآمد ۳۰ درصد از پایین‌ترین درآمدها در بین این ۱۰۰ نفر است و همچنین W_F در نقطه $0/3$ میزان ثروت اضافی ۷۰ درصد از ثروتمندترین افراد جامعه را نشان می‌دهد که ثروت اضافی آن‌ها حداقل ۳۰ درصد از درآمدشان را تشکیل می‌دهد.

۳-۳. ارتباط تبدیل TTT با شاخص‌های نابرابری اقتصادی

با بکار بردن روش انتگرال‌گیری جز به جز در روابط (۷) و (۸) و استفاده از یک تغییر متغیر می‌توان شاخص‌های اقتصادی معرفی شده در بخش ۲-۱ را بر حسب تبدیل‌های زمان کل آزمون مقیاسی و فزونی ثروت مقیاسی بازنویسی کرد که به طور خلاصه در جدول ۱ بیان می‌شود.

جدول ۱: ارتباط بین تبدیل‌های $\varphi(p)$ و $\psi(p)$ با سایر شاخص‌های اقتصادی

شاخص	تبدیل $\varphi(p)$	تبدیل $\psi(p)$
لورنتس	$L(p) = \varphi(p) - \frac{(1-p)F^{-1}(p)}{\mu}$	$L(p) = \frac{\mu - (1-p)F^{-1}(p)}{\mu} - \psi(p)$
بن‌فرونی	$B(p) = \frac{\varphi(p)}{p} - \frac{(1-p)F^{-1}(p)}{p\mu}$	$B(p) = \frac{1 - \psi(p)}{p} - \frac{(1-p)F^{-1}(p)}{p\mu}$
زنگا	$Z(p) = 1 - \frac{1-p}{p} \frac{\mu\varphi(p) - (1-p)F^{-1}(p)}{\mu - (\mu\varphi(p) - (1-p)F^{-1}(p))}$	$Z(p) = 1 - \frac{1-p}{p} \frac{\mu(1 - \psi(p)) - (1-p)F^{-1}(p)}{\mu - (\mu(1 - \psi(p)) - (1-p)F^{-1}(p))}$
لیمکوه لر	$K(p) = 1 - \varphi(1-p) + \frac{pF^{-1}(1-p)}{\mu}$	$K(p) = \psi(1-p) + \frac{pF^{-1}(1-p)}{\mu}$

$G = 1 - 2 \int_0^1 [1 - \psi(u) - \frac{(1-u)Q(u)}{\mu}] du$	$G = 1 - 2 \int_0^1 [\varphi(u) - \frac{(1-u)Q(u)}{\mu}] du$	ضریب جینی
$P = \psi(F(\mu))$	$P = 1 - \varphi(F(\mu))$	ضریب پترا

منبع: یافته‌های تحقیق

۳-۴. نمودار زمان کل آزمون

برگمن و کلفسجو (۲۰۱۴) نحوه رسم نمودار زمان کل آزمون را به صورت مفصل بیان کرده‌اند. در ادامه با ارائه چند مثال این نمودار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس این نمودار را به عنوان یک ابزار برای سنجش نابرابری درآمد معرفی و ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $0 = x_{(0)} \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ یک نمونه مرتب شده از درآمدهای n فرد از یک جامعه با توزیع درآمد F باشند. در این صورت نمودار زمان کل آزمون بر اساس دستورالعمل زیر رسم می‌شود:

گام اول: فرض کنید $S_0 = 0$ و $S_j = S_{j-1} + (n - j + 1)(x_{(j)} - x_{(j-1)})$ برای $j = 1, 2, \dots, n$ که S_j ها همان مقادیر TTT هستند.

گام دوم: نرمال سازی مقادیر TTT به صورت $u_j = \frac{S_j}{S_n}$ برای $j = 0, 1, \dots, n$ انجام شود.

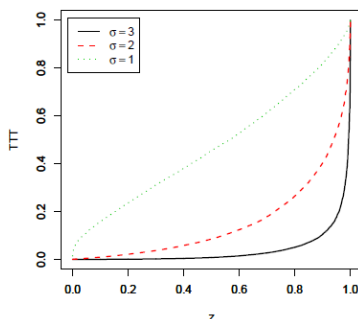
گام سوم: نقاط $(p = \frac{j}{n}, u_j)$ برای $j = 0, 1, \dots, n$ در صفحه مختصات مشخص و متصل شوند.

با استفاده از الگوریتم بالا نمودار زمان کل آزمون را برای داده‌های شبیه‌سازی شده از متغیر تصادفی لگ نرمال با پارامترهای مختلف رسم می‌کنیم.

مثال ۳-۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی لگ نرمال با پارامترهای μ و σ باشد.

الف) نمودار زمان کل آزمون برای $\mu = 0$ و $\sigma = 1, 2, 3$ به صورت زیر خواهد بود.

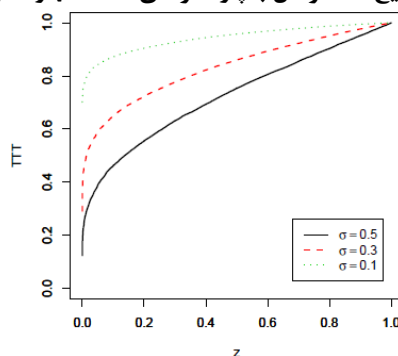
شکل ۵: نمودار TTT توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma = 1, 2, 3$



منبع: محاسبات تحقیق با نرم افزار R

(ب) نمودار زمان کل آزمون برای $\mu = 0$ و $\sigma = 0/1, 0/3, 0/5$ نیز در شکل ۶ نشان داده شده است.

شکل ۶: نمودار TTT توزیع لگ نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma = 0/1, 0/3, 0/5$



منبع: یافته های پژوهش

۳-۴-۱. انعطاف پذیری منحنی زمان کل آزمون

نمودار زمان کل آزمون شامل یک منحنی صعودی است که از گوشه پایین سمت چپ شروع می‌شود و انتهای آن در گوشه بالا سمت راست مربع واحد قرار دارد. اگر توزیع F به داده‌ها برازش داده شود آنگاه با افزایش حجم نمونه نمودار TTT داده‌ها به نمودار تبدیل $\varphi_X(p)$ توزیع F همگرا می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم نمودار زمان کل آزمون تفسیر شهودی آن است و مانند منحنی لورنتس یک منحنی محدب است، با این تفاوت که این منحنی علاوه بر محدب بودن می‌تواند مقعر نیز باشد. (شکل‌های ۵ و ۶)

با توجه به نحوه رفتار نمودار TTT و شباهت آن به نمودار لورنتس می‌توان این نمودار را نیز به عنوان ابزاری برای بررسی و سنجش نابرابری درآمد در یک جامعه مورد استفاده قرار داد. دالتون (۱۹۲۰) هفت ویژگی را برای یک شاخص نابرابری مطلوب معرفی کرد. ابونوری

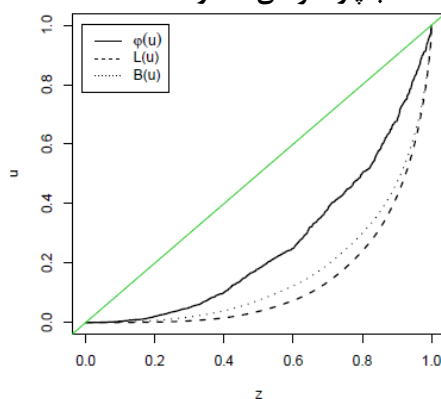
و اسنادی (۱۳۸۴) این ویژگی‌ها را با جزئیات بیشتر ارائه دادند. واضح است که هر چه شاخص‌های مورد مطالعه دارای ملاک و ویژگی‌های بیشتری از اصول هفتگانه حاکم بر شاخص‌های نابرابری باشند، شاخص مورد نظر مطلوب‌تر و دقیق‌تر است. در حالتی که نمودار TTT محدب است، رفتار نمودار شبیه نمودار لورنتس است یعنی تحذب بیشتر نمودار نشان‌دهنده نابرابری بیشتر درآمد در جامعه است و هر چه نمودار به نیمساز مربع واحد نزدیک‌تر باشد بیانگر کم شدن نابرابری درآمد خواهد بود. در حالتی که نمودار TTT مقعر باشد و بالای خط نیمساز قرار بگیرد رفتار نمودار را به این صورت می‌توان توجیه کرد که تقعر بیشتر نمودار نشان‌دهنده نابرابری کمتر درآمد در جامعه می‌باشد و نزدیکی به خط نیمساز نشان‌دهنده زیاد بودن نابرابری درآمد است. شکل‌های ۵ و ۶ نیز به روشنی این موضوع را نشان می‌دهند. با بررسی ویژگی‌های یک شاخص نابرابری برای منحنی زمان کل آزمون نشان داده می‌شود که این منحنی سه ویژگی اصلی یک شاخص نابرابری یعنی محدب بودن، حساسیت نسبت به افزودن یک مقدار ثابت و عدم حساسیت نسبت به تغییر متناسب در درآمد افراد جامعه را دارد.

با در نظر گرفتن ارتباط بین تبدیل‌های لورنتس و بن‌فرونی با یکدیگر و همچنین رابطه با تبدیل زمان کل آزمون به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که همواره نمودار زمان کل آزمون از این دو نمودار بزرگتر است یعنی:

$$L(p) \leq B(p) \leq \varphi(p). \quad (۱۳)$$

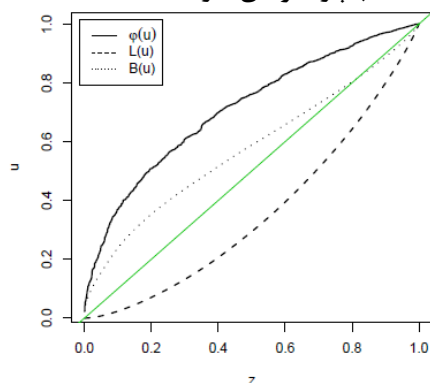
برقراری رابطه (۱۳) در نمودارهای ۷ و ۸ قابل مشاهده است.

شکل ۷: نمودارهای زمان کل آزمون، لورنتس و بن‌فرونی برای داده‌های وایبول با پارامترهای ۰/۵ و ۵



منبع: محاسبات پژوهش با نرم افزار R

شکل ۸: نمودارهای زمان کل آزمون، لورنتس و بن‌فرونی برای داده‌های وایبول با پارامترهای ۲ و ۵



منبع: محاسبات پژوهش با نرم افزار R

۳-۴-۲. حساسیت نسبت به افزودن مقدار ثابت

یکی از ویژگی‌های اصلی نمودار زمان کل آزمون حساسیت نسبت به افزودن یک مقدار ثابت است که در گزاره زیر بیان و اثبات می‌شود.

گزاره ۳-۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی نشان‌دهنده میزان درآمد افراد یک جامعه با میانگین متناهی μ و تبدیل زمان کل آزمون مقیاسی φ_X باشد. اگر $Y=X+a$ برای $a > 0$ ، آنگاه تبدیل φ نسبت به Y پایا^۱ نیست یعنی نسبت به افزودن یک مقدار ثابت به درآمد افراد جامعه حساس است.

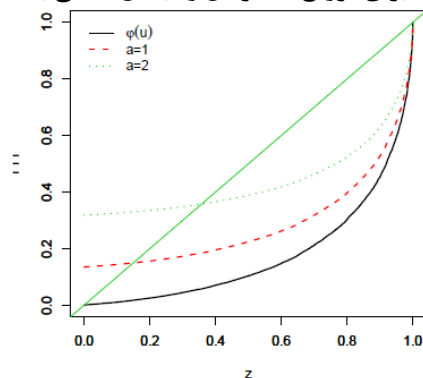
برهان: از اینکه $H_Y^{-1}(p) = H_X^{-1}(p) + a$ و $\mu_Y = \mu + a$ نتیجه می‌شود که

$$\varphi_Y(p) = \frac{H_Y^{-1}(p)}{\mu_Y} = \frac{H_X^{-1}(p) + a}{\mu + a} = \frac{\mu}{\mu + a} \varphi_X(p) + \frac{a}{\mu + a}.$$

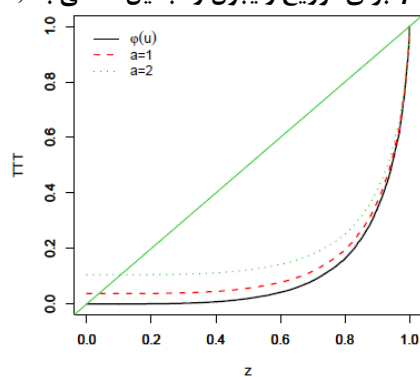
و این رابطه برهان را کامل می‌کند.

برای درک بهتر این موضوع نمودار φ را برای داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع لگ‌نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 2$ و توزیع وایبول با پارامترهای شکل ۳/۰ و مقیاس ۳ و مقادیر a مختلف رسم و تحلیل می‌شود.

^۱. Invariant

شکل ۹: نمودار φ برای توزیع لگ نرمال و تبدیل مکانی با $a=1,2$ 

منبع: یافته‌های پژوهش

شکل ۱۰: نمودار φ برای توزیع وایبول و تبدیل مکانی با $a=1,2$ 

منبع: یافته‌های پژوهش

بررسی نمودارهای رسم شده در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان می‌دهد اگر به درآمد تمام افراد جامعه a واحد اضافه شود نمودار تبدیل φ به خط نیمساز نزدیک‌تر شده و در نتیجه میزان نابرابری درآمد کاهش پیدا خواهد کرد و این کاهش در افراد با درآمد پایین‌تر محسوس‌تر از افراد با درآمد بالاتر است به طوری که در بین افراد ثروتمند جامعه تغییر درآمد کمتری ایجاد می‌شود. همچنین با افزایش درآمد میزان نابرابری در افراد دهک‌های پایین جامعه کمتر خواهد بود. با مقایسه شکل ۳ با شکل‌های ۹ با ۱۰ نیز می‌توان نتیجه گرفت که افزایش درآمد ثابت به درآمد افراد باعث کاهش نابرابری درآمد خواهد شد اما این نابرابری در نمودارهای زمان کل آزمون و لورنتس نتایج متفاوتی را نشان می‌دهند. یعنی نمودار φ افزایش درآمد در افراد کم درآمد را بیشتر از افراد پر درآمد نشان می‌دهد اما در نمودار لورنتس این افزایش درآمد باعث نزدیک‌تر شدن طبقه متوسط جامعه نسبت به سایر طبقات

درآمدی به خط برابری می‌شود.

۳-۴-۳. عدم حساسیت نسبت به تغییر متناسب همه درآمدها

عدم حساسیت نسبت به تغییر متناسب در درآمد افراد جامعه نیز از دیگر ویژگی‌های اصلی نمودار زمان کل آزمون است که در گزاره ۳-۲ بیان و ثابت می‌شود.

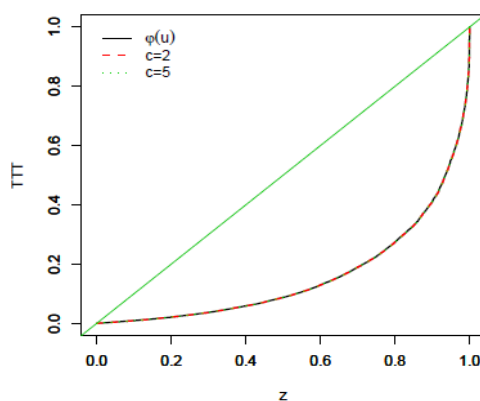
گزاره ۳-۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی نشان‌دهنده میزان درآمد افراد یک جامعه با میانگین متناهی μ و تبدیل زمان کل آزمون مقیاسی φ_X باشد. در این صورت اگر $Z=cX$ برای $c > 0$ ، آنگاه تبدیل φ نسبت به Z پایا است یعنی نسبت به تغییر متناسب در درآمد افراد جامعه حساس نیست.

برهان: چون $H_Z^{-1}(p) = cH_X^{-1}(p)$ و $\mu_Z = c\mu$ بنابراین

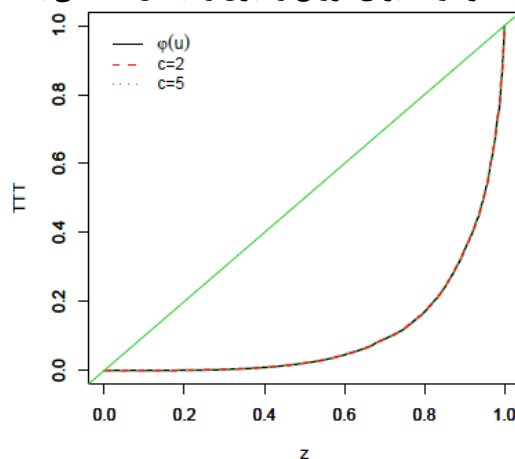
$$\varphi_Z(p) = \frac{H_Z^{-1}(p)}{\mu_Z} = \frac{cH_X^{-1}(p)}{c\mu} = \varphi_X(p).$$

یعنی تبدیل φ نسبت به تبدیل مقیاس Z پایا است و در نتیجه برهان کامل می‌شود. برای این منظور نمودار φ برای داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع لگ‌نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 2$ و توزیع وایبول با پارامترهای شکل ۳/۰ و مقیاس ۳ و مقادیر c مختلف رسم شده است. (شکل‌های ۱۱ و ۱۲)

شکل ۱۱: نمودار φ برای توزیع لگ‌نرمال و تبدیل مقیاسی با $c=2,5$



منبع: یافته‌های پژوهش

شکل ۱۲: نمودار φ برای توزیع وایبول و تبدیل مقیاسی با $c=2,5$ 

منبع: یافته‌های پژوهش

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهند که تبدیل φ تحت تبدیل‌های مقیاسی پایا است و نمودار برای c های مختلف تغییری نمی‌کند یعنی اگر درآمد تمام افراد جامعه c برابر شود در فاصله درآمدی افراد تغییری ایجاد نخواهد شد و در نتیجه نابرابری درآمد ثابت باقی می‌ماند. بنابراین در این حالت رفتار نمودار زمان کل آزمون و نمودار تبدیل لورنتس یکسان می‌باشد.

۴. تحلیل داده‌های درآمد

هر ۵ سال در کشور سرشماری نفوس و مسکن توسط مرکز ایران انجام شده و داده‌های مربوط به هزینه و درآمد تمام خانواده‌های ایرانی توسط ماموران مرکز آمار جمع‌آوری می‌شود. همچنین برای به روز بودن داده‌ها هر ساله نیز نمونه‌ای به حجم تقریباً ۴۰ هزار خانواده انتخاب و داده‌های هزینه و درآمد آن‌ها ثبت می‌شود. اطلاعات مربوط به این نمونه‌ها را می‌توان در درگاه مرکز آمار ایران^۱ مشاهده کرد. در این بخش از داده‌های درآمد خانواده‌های ایرانی در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵ استفاده شده و منحنی‌های زمان کل آزمون، لورنتس و زنگا بر اساس این داده‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرد. نمودار هیستوگرام (شکل ۱۳) و همچنین نتایج جدول ۲ عدم تقارن توزیع داده‌های هر ۶ سال را نشان می‌دهد.

^۱. www.sci.org

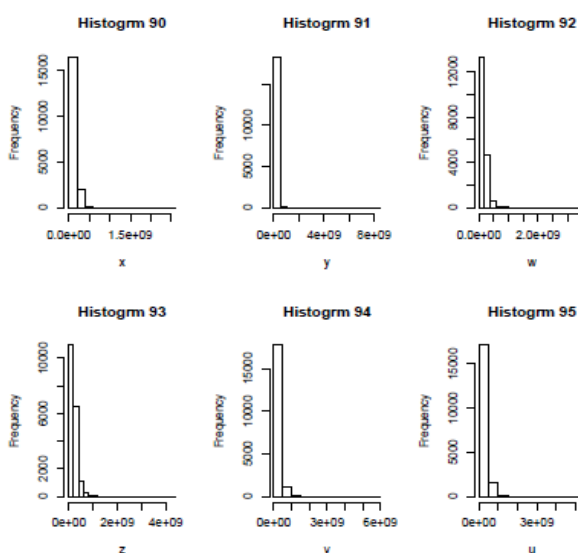
جدول ۲: مقادیر چولگی و کشیدگی داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵

سال	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵
چولگی	۵/۰۴۹	۲۴/۷۳۹	۵/۴۱۸	۶/۲۹۹	۶/۱۵۴	۵/۲۳۱
کشیدگی	۸۰/۷۲۶	۱۱۱۴/۱	۸۵/۱۶۸	۱۰۰/۰۵	۱۱۱/۹۸	۷۰/۴۹۸

منبع: محاسبات تحقیق

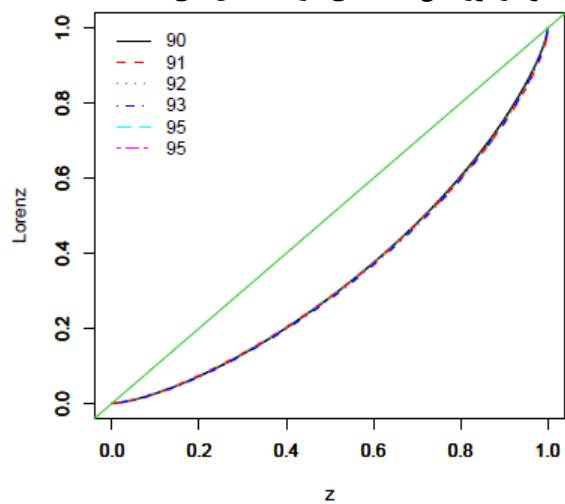
حال برای بررسی نابرابری درآمد در سال‌های مختلف منحنی‌های زمان کل آزمون و لورنتس و زنگا را رسم می‌کنیم. شکل ۱۴ نشان می‌دهد که بر اساس منحنی لورنتس میزان نابرابری درآمد در سال‌های ۹۰ تا ۹۵ یکسان است و این نمودار اختلاف درآمد بین سال‌های مختلف را نمی‌تواند به وضوح نشان دهد، اما در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ که به ترتیب منحنی‌های زمان کل آزمون و زنگا را برای این داده‌ها نشان می‌دهد، وجود اختلاف در میزان نابرابری درآمد سال‌های ۹۰ تا ۹۵ به وضوح قابل مشاهده است و در نتیجه میزان نابرابری درآمد در سال ۱۳۹۵ نسبت به سال‌های قبل بیشتر شده است. همچنین نابرابری در سال‌های ۱۳۹۱ و ۱۳۹۲ در دهک‌های پایین جامعه کاهش یافته و در دهک‌های بالای جامعه افزایش یافته‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود رفتار دو منحنی زنگا و زمان کل آزمون کاملاً شبیه به هم است و منحنی زمان کل آزمون در مقایسه با منحنی لورنتس دقت بیشتری دارد و جزئیات بیشتری از نحوه توزیع درآمد جوامع نزدیک به هم را نشان می‌دهد.

شکل ۱۳: نمودار هیستوگرام داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵



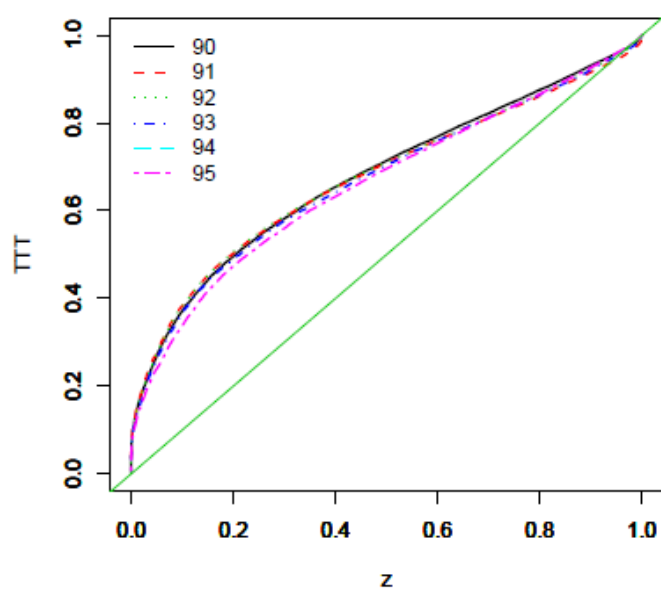
منبع: یافته‌های تحقیق

شکل ۱۴: نمودار لورنتس داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵



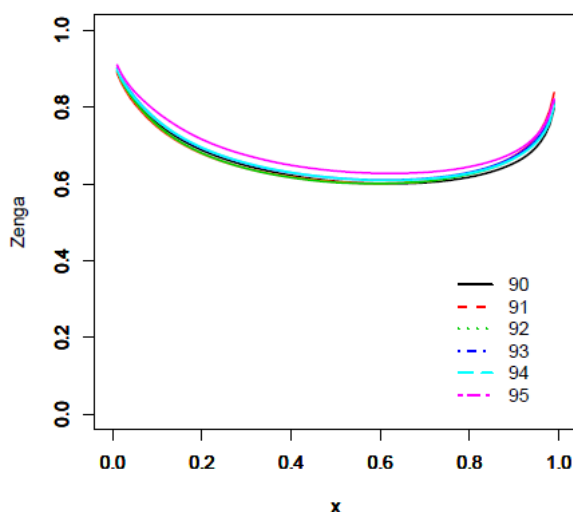
منبع: یافته‌های پژوهش

شکل ۱۵: نمودار زمان کل آزمون داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵



منبع: یافته‌های پژوهش

شکل ۱۶: نمودار زنگا داده‌های درآمد سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵



منبع: یافته‌های پژوهش

۵. معرفی مدلی تغییر شکل یافته با کاربرد در اقتصاد

تابع تغییر شکل که از ابزارهای مهم برای تعیین کردن یک کلاس خاص از توابع هستند بر اساس اصول ریاضیات و همچنین عدم حتمیت در نظریه اقتصاد تعریف می‌شوند و کاربرد فراوانی در نظریه بیمه و محاسبه میزان پرداخت اضافه برای یک قرارداد بیمه دارند. وانگ (۱۹۹۵)، وانگ (۱۹۹۶)، هورلیمان (۱۹۹۸)، وانگ (۲۰۰۰) و موریلان (۲۰۰۵) کاربردهایی از این تابع را در نظریه بیمه و محاسبه میزان پرداخت اضافه برای یک قرارداد بیمه بیان کردند. تابع مخاطره معکوس، تبدیل نرمال، تابع تغییر شکل یافته مقدار مورد انتظار دمی شرطی و تابع تغییر شکل یافته LB^1 نیز از معروف‌ترین توابع تغییر شکل یافته با کاربرد در علم بیمه و اقتصاد هستند. ناوارو و همکاران (۲۰۱۶)، ناوارو و دل‌آگولا (۲۰۱۷) و ناوارو (۲۰۱۸) نیز کاربردهایی را از توابع تغییر شکل یافته بیان نموده‌اند.

در این قسمت با استفاده از یک تابع تغییر شکل جدید و با به‌کار بردن روش تابع تغییر شکل در تولید توزیع جدید، بر اساس توزیع‌های اقتصادی داگوم، بور نوع ۱۲ و فیسک، سه توزیع جدید معرفی و نحوه به‌دست آوردن برآورد پارامترهای این توزیع‌ها با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی بیان می‌شود. علاوه بر این با تحلیل داده‌های واقعی درآمد

¹. Look Back

نشان می‌دهد که استفاده از تابع تغییر شکل در ساخت توزیع‌ها منجر به تولید توزیع‌های جدید با برازش بهتری نسبت به برخی از توزیع‌های پایه ارائه می‌دهد. در ادامه ابتدا تعریف تابع تغییر شکل و ویژگی‌های آن بیان و سپس با استفاده از روش تابع تغییر شکل یافته و بادر نظر گرفتن برخی توزیع‌های اقتصادی به عنوان توزیع پایه، توزیع‌های جدیدی معرفی و نحوه برآورد پارامترهای آن‌ها بیان می‌شود.

تعریف ۵-۱. تابع $g(x): [0,1] \rightarrow [0,1]$ را یک تابع تغییر شکل گوییم هرگاه $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$ و $g(\cdot)$ یک تابع پیوسته و نانزولی بر روی بازه $[0,1]$ باشد.

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ و $g(\cdot)$ یک تابع تغییر شکل باشد آنگاه

$$F_g(x) = g[F_X(x)] = (g \circ F)(x). \quad (14)$$

که در آن $F_g(x)$ نیز یک تابع توزیع است و اصطلاحاً توزیع تغییر شکل یافته F نامیده می‌شود. برای مطالعه بیشتر به محتشمی‌برزادران (۱۳۹۲) مراجعه شود. به سادگی می‌توان نشان داد که تابع $g(t) = e^{-\theta(1-t)} - \theta(1-t)$ ، $t \in [0,1]$ ، $\theta > 0$ یک تابع تغییر شکل است زیرا $g(t): [0,1] \rightarrow [0,1]$ ، یک تابع صعودی با $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$ بنا بر این اگر $F(x)$ یک توزیع پایه دلخواه باشد آنگاه با استفاده از رابطه (۱۴)، تابع توزیع تغییر شکل یافته و تابع چگالی احتمال متناظر آن بر اساس تابع $g(t)$ به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$F_g(x) = g(F(x)) = e^{-\theta \bar{F}(x)} - e^{-\theta \bar{F}(x)}. \quad (15)$$

$$f_g(x) = F'_g(x) = f(x)(\theta e^{-\theta \bar{F}(x)} + e^{-\theta}). \quad (16)$$

حال با در نظر گرفتن توزیع‌های داگوم، بور نوع ۱۲ و فیسک به عنوان توزیع پایه، توزیع‌های تغییر شکل یافته متناظر با آنها به صورت زیر خواهند بود.

$$F_1(x) = e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-\alpha} \right)^{-\beta} \right)} - e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{-\alpha} \right)^{-\beta} \right)}. \quad x, \alpha, \beta, \lambda, \theta > 0$$

$$F_2(x) = e^{-\theta(1+x^\alpha)^{-\beta}} - e^{-\theta(1+x^\alpha)^{-\beta}}. \quad x, \alpha, \beta, \theta > 0$$

$$F_3(x) = e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)^{-1}\right)} - e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)^{-1}\right)}.$$

$$x, \alpha, \beta, \theta > 0$$

که به ترتیب توزیع تغییر شکل یافته داگوم، توزیع تغییر شکل یافته بور نوع ۱۲ و توزیع تغییر شکل یافته فیسک نامیده می‌شوند.

۵-۱. برآورد پارامترها

یکی از روش‌های معروف در برآورد پارامترهای یک مدل روش درست‌نمایی ماکسیمم است. در ادامه با استفاده از این روش نحوه به‌دست آوردن برآورد پارامترهای مدل داگوم تغییر شکل یافته بیان می‌شود. برآورد پارامترهای سایر مدل‌ها نیز به‌طور مشابه به‌دست می‌آیند. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده x_1, x_2, \dots, x_n از توزیع داگوم تغییر شکل یافته باشد. در این صورت تابع درست‌نمایی برای این مشاهدات به‌صورت زیر است:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \prod_{i=1}^n \alpha \beta \lambda^\alpha x_i^{-\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta-1}$$

$$\times \left(\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta} \right).$$

بنابراین لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت زیر خواهد بود:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta, \lambda, \theta)$$

$$= \ln \prod_{i=1}^n \alpha \beta \lambda^\alpha x_i^{-\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta-1} \left(\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \ln \alpha + \ln \beta + \alpha \ln \lambda - (\alpha + 1) \ln x_i - (\beta + 1) \ln \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln \left(\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta} \right)$$

با مشتق‌گیری از تابع لگاریتم درست‌نمایی نسبت به هر کدام از پارامترهای α, β, λ و θ و مساوی صفر قرار دادن آنها داریم:

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} + \ln \lambda - \ln x_i - (\beta + 1) \frac{\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha} \ln \frac{x_i}{\lambda}}{1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta^2 \beta \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha} \ln \frac{x_i}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta-1} e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)}}{\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta}} = 0.$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta} - \ln \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\theta^2 \ln \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right) \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta} e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)}}{\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta}} = 0.$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{(\beta + 1) \alpha x_i^{-\alpha} \lambda^{\alpha-1}}{1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \theta x_i^{-\alpha} \lambda^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta-1} e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)}}{\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta}} = 0.$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} - e^{-\theta}}{\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta}} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right) e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)}}{\theta e^{-\theta \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^{-\beta}\right)} + e^{-\theta}} = 0.$$

با حل معادلات بالا نسبت به پارامترهای α ، β ، λ و θ و به دست آوردن مقادیر آنها برآورد این پارامترها به دست خواهد آمد اما همان طور که ملاحظه می شود معادلات به دست آمده دارای فرم بسته ای نیستند و جواب آنها به صورت تحلیلی به دست نمی آیند و برای

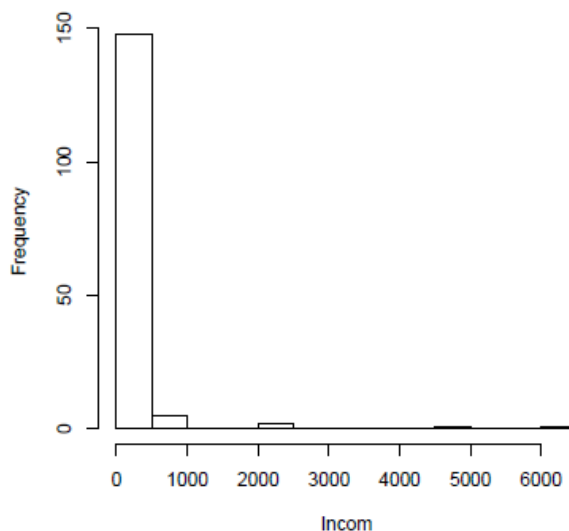
حل این معادلات باید از روش‌های عددی مانند روش نیوت-رافسون و یا با استفاده از برنامه بهینه‌سازی استاندارد در نرم‌افزار R استفاده نمود.

۵-۲. تحلیل داده واقعی

به منظور نشان دادن برازندگی توزیع‌های تولید شده بر اساس مدل (۱۵) داده‌های درآمد شهروندان تگزاس، (آرنولد ۱۹۸۳) و داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال ۱۳۹۵ را تحلیل می‌کنیم.

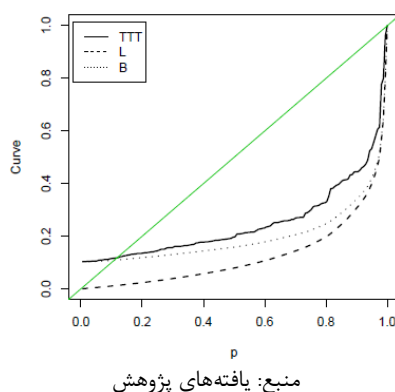
با رسم نمودار هیستوگرام داده‌های درآمد شهروندان در تگزاس (شکل ۱۷) و همچنین در نظر گرفتن ضرایب چولگی و کشیدگی این داده‌ها که به ترتیب $۷/۰۵۴۳$ و $۵۴/۰۷۲$ به دست آمده‌اند می‌توان عدم تقارن توزیع این داده‌ها و وجود نابرابری درآمد را نتیجه گرفت. بررسی نمودارهای زمان کل آزمون، لورنتس و بن‌فرونی این داده‌ها (شکل ۱۸) نیز وجود نابرابری درآمد را نشان می‌دهد.

شکل ۱۷: نمودار هیستوگرام داده‌های درآمد شهروندان در تگزاس



منبع: یافته‌های تحقیق

شکل ۱۸: نمودارهای زمان کل آزمون، لورنتس و بن فرونی داده‌های درآمد شهروندان در تگزاس



حال برای به دست آوردن مدل مناسب برای این داده‌ها، توزیع‌های داگوم، بر نوع ۱۲ و فیسک و همچنین توزیع‌های تغییر شکل یافته جدید به دست آمده بر اساس این سه توزیع به این داده‌ها برازش داده شده و بر اساس معیارهای ارزندگی مدل با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

برای مقایسه برازندگی توزیع‌ها می‌توان از معیارهای اطلاعاتی AIC ، $CAIC$ ، BIC و $HQIC$ همچنین آماره P به این صورت استفاده کرد که در برازش یک توزیع به یک سری داده هر چه معیارهای ۴ گانه اطلاعاتی کمتر باشد نشان دهنده بهتر بودن آن توزیع است و همچنین هر چه مقدار آماره P نیز به ۱ نزدیک‌تر باشد یعنی توزیع مورد نظر عملکرد بهتری در توصیف داده‌های مورد مطالعه دارد. قابل ذکر است که در حالتی که معیارهای ۴ گانه و آماره P نتایج متفاوتی را نشان دهند اولویت تصمیم‌گیری بر اساس معیارهای ۴ گانه خواهد بود.

جدول ۳ مقادیر آماره P و معیارهای اطلاعاتی را برای هر کدام از توزیع‌های مورد مطالعه نشان می‌دهد. با توجه به مقدار آماره P به دست آمده برای توزیع بر نوع ۱۲ تغییر شکل یافته نسبت به بقیه توزیع‌ها بیشتر است و همچنین معیارهای اطلاعاتی برای این توزیع نیز از بقیه توزیع‌ها کمتر است می‌توان نتیجه گرفت که توزیع بر نوع ۱۲ تغییر شکل یافته بهترین برازش را به این داده‌ها می‌دهد و به همین ترتیب می‌توان گفت که توزیع‌های تغییر شکل یافته فیسک، داگوم و تغییر شکل یافته داگوم در اولویت‌های بعدی هستند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که مدل‌های تغییر شکل یافته نسبت به توزیع پایه عملکرد بهتری دارند، بنابراین مدل تغییر شکل یافته جدید معرفی شده در (۱۵) می‌تواند به عنوان

یک مدل بهبود دهنده در برازش داده‌ها بکار گرفته شود.

جدول ۳: معیارهای ارزیابی مدل برای داده‌های درآمد شهروندان تگزاس

توزیع	AIC	CAIC	BIC	HQIC	آماره P
داگوم	۱۷۳۳/۶۶	۱۷۴۲/۲۳	۱۷۴۲/۲۳	۱۷۳۶/۷۹	۰/۱۲۹۱
بر نوع ۱۲	۲۰۸۳/۵۸	۲۰۸۳/۶۶	۲۰۸۹/۶۹	۲۰۸۶/۶۳	<۰/۰۰۰۰۰۱
فیسک	۱۷۷۷/۸۳	۱۷۷۷/۹۱	۱۷۸۳/۹۴	۱۷۸۰/۳۱	۰/۰۰۳۴
داگوم تغییر شکل یافته	۱۷۳۵/۰۸	۱۷۳۵/۳۴	۱۷۴۷/۳	۱۷۴۰/۰۴	۰/۱۲۶۲
بر نوع ۱۲ تغییر شکل یافته	۱۷۳۳/۰۱	۱۷۳۳/۱۸	۱۷۴۲/۱۸	۱۷۳۶/۷۴	۰/۱۲۹۳
فیسک تغییر شکل یافته	۱۷۳۳/۱۲	۱۷۳۳/۲۸	۱۷۴۲/۲۹	۱۷۳۶/۸۴	۰/۱۲۸۹

منبع: یافته‌های تحقیق

مثال ۵-۱. با استفاده از داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال ۱۳۹۵ و برازش توزیع های بر نوع ۱۲، داگوم، فیسک و وایبول و همچنین توزیع‌های تغییر شکل یافته بر اساس این ۴ توزیع به آن‌ها، معیارهای ۴ گانه اطلاعاتی و همچنین مقدار آماره P برای مقایسه این ۸ توزیع در جدول ۴ نشان داده شده‌است.

جدول ۴: معیارهای ارزیابی مدل برای داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی

توزیع	AIC	CAIC	BIC	HQIC	مقدار P
داگوم	۳۲۹۲/۹	۳۲۹۳	۳۳۰۳/۴۵	۳۲۹۷/۱۵	۰/۷۷۵۵
بر نوع ۱۲	۴۱۱۰/۲۳	۴۱۱۰/۲۸	۴۱۱۷/۲۶	۴۱۱۳/۰۶	۰/۰۰۰۰۱
وایبول	۳۲۹۱/۳۷	۳۲۹۱/۴۱	۳۲۹۸/۴	۳۲۹۴/۲	۰/۳۱۲۶
فیسک	۳۲۹۶/۰۸	۳۲۹۶/۱۳	۳۳۰۳/۱۱	۳۲۹۸/۹۱	۰/۷۴۲۶
داگوم تغییر شکل یافته	۳۳۷۵/۰۵	۳۳۷۵/۲۱	۳۳۸۹/۱۲	۳۳۸۰/۷۱	۰/۰۰۷
بر نوع ۱۲ تغییر شکل یافته	۳۳۶۶/۵	۳۳۶۶/۶	۳۳۷۷/۱	۳۳۷۰/۷	۰/۰۰۴
وایبول تغییر شکل یافته	۳۲۸۸/۳۲	۳۲۸۸/۴۲	۳۲۹۸/۸۸	۳۲۹۲/۵۷	۰/۸۴۱۶
فیسک تغییر شکل یافته	۳۲۹۸/۰۱	۳۲۹۸/۱۱	۳۳۰۸/۵۶	۳۳۰۲/۲۶	۰/۷۴۵۳

منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به مقادیر آماره P و همچنین معیارهای اطلاعاتی به دست آمده می‌توان نتیجه

گرفت که توزیع وایبول تغییر شکل یافته مناسب‌ترین برازش را در بین ۸ مدل مورد بررسی ارائه داده‌است زیرا دارای بیشترین مقدار آماره P است و همچنین معیارهای اطلاعاتی آن نیز کمترین مقدار را در مقایسه با دیگرمدل‌های مورد مطالعه دارد. توزیع‌های وایبول، فیسک داگوم و فیسک تغییر شکل یافته در اولویت‌های بعدی قرار دارند. همچنین ملاحظه می‌شود که در این مثال مدل وایبول تغییر شکل یافته عملکرد بهتری نسبت به مدل وایبول در برازش داده‌ها دارد.

۶. بحث و نتیجه‌گیری:

در این پژوهش با استفاده از داده‌های درآمد خانوار مرکز آمار ایران و به کارگیری شاخص‌های نابرابری زمان کل آزمون، لورنتس و زنگا و منحنی‌های متناظر آن‌ها نابرابری درآمد در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۰ بررسی و عملکرد منحنی زمان کل آزمون در تشخیص نابرابری درآمد با منحنی لورنتس مقایسه و دلایل برتری آن نسبت به منحنی لورنتس تشریح شده است. در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت که منحنی زمان کل آزمون بهتر از منحنی لورنتس اختلاف نابرابری درآمد سال‌های مختلف را نشان دهد. به خصوص در بررسی جوامعی که دارای نابرابری درآمد نزدیک به هم هستند، این منحنی نسبت به منحنی لورنتس اختلاف نابرابری درآمد را واضح‌تر نشان می‌دهد. در پایان نیز با استفاده از روش تابع تغییر شکل و بر اساس یک تابع تغییر شکل جدید یک مدل تغییر شکل یافته معرفی و ویژگی‌ها و همچنین نحوه به دست آوردن برآورد پارامترهای آن با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم ارائه شده است. سپس با در نظر گرفتن چند توزیع اقتصادی به عنوان توزیع پایه معیارهای برازندگی مدل برای داده‌های درآمد شهروندان تگزاس و داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال ۱۳۹۵ مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده می‌شود که توزیع‌های تغییر شکل جدید می‌توانند برازش بهتری نسبت به توزیع پایه ایجاد کنند که این موضوع از مقایسه معیارهای اطلاعاتی چهارگانه و همچنین آماره P برای توزیع‌های مورد نظر قابل استنباط می‌باشد.

مراجع:

- ابونوری، اسمعیل و اسناوندی، اسماعیل (۱۳۸۴)، برآورد و ارزیابی سازگاری شاخص‌های نابرابری اقتصادی با استفاده از ریزداده‌ها در ایران، مجله تحقیقات اقتصادی دانشگاه تهران، ۷۱: ۲۱۰-۱۷۱.
- ابونوری، اسمعیل و ذوقی، الناز (۱۳۹۲)، برآورد و مقایسه نابرابری توزیع درآمد با روش‌های پارامتریک و

- ناپارامتریک، پژوهش‌نامه علمی پژوهشی اقتصاد کلان، ۸(۳۰): ۳۰-۱۳.
- ابونوری، اسمعیل و فراهتی، محبوبه (۱۳۹۴)، ساختار تولید و توزیع درآمد در ایران. فصلنامه علمی مدل‌سازی اقتصادی، ۹(۳۲): ۲۳-۱.
- بهدانی، زهرا و محتشمی‌برزادان، غلامرضا (۱۳۹۱)، کاربردی از اندازه‌گیری میزان چولگی ناهمواری بر اساس منحنی لورنتس و توزیع درآمد، مجله بررسی‌های آمار رسمی ایران، ۲۳(۲): ۲۲۵-۲۴۲.
- بهدانی، زهرا، واقعی، یدا...، محتشمی‌برزادان، غلامرضا و صادقیور گیلده، بهرام (۱۳۹۴)، مطالعه مقایسه‌ای شاخص‌های توزیع درآمد استان خراسان جنوبی با کشور طی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۳، مجله بررسی‌های آمار رسمی ایران، ۲۶(۲): ۱۶۱-۱۸۱.
- خراشادی زاده، سیدجمال، محتشمی‌برزادان، غلامرضا و پوراسمعیلی، حدیث (۱۳۹۳)، نابرابری درآمد در خطوط اتوبوسرانی مشهد بر اساس شاخص زنگا، فصلنامه مدل‌سازی اقتصادسنجی، ۱(۱): ۲۱-۳۱.
- محتشمی‌برزادان، حسینعلی (۱۳۹۲)، مفصل تغییرشکل و ویژگی‌های آن، پایان‌نامه کارشناسی ارشد-دانشگاه فردوسی مشهد.
- میرزایی، شهریار، محتشمی‌برزادان، غلامرضا و امینی، محمد (۱۳۹۷)، شاخص زنگا در سنجش نابرابری درآمد. فصلنامه مدل‌سازی اقتصادسنجی، ۳(۴): ۱۱۳-۱۳۳.
- Abounoori, E. & McCloughan, P. (2000), Measuring the Gini coefficient: An empirical assessment of non-parametric and parametric methods (No. 2000_06).
- Abounoori, E. (2003), Modeling the income distribution and Gini coefficient using the Log-Logistic distribution, Journal of Social Sciences and Humanities of Shiraz university. 19(2): 13 - 24.
- Arnold, B. C. (1983), Pareto Distributions. Fairland, MD: International Co-operative Publishing House.
- Atkinson, A. B. (1970), On the measurement of inequality. Journal of Economic Theory, 2(3): 244-263.
- Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. & Brunk, H. D. (1972), Statistical Inference under Order Restrictions, John Wiley & Sons, New York.
- Barlow, R. E. & Doksum, K. A. (1972), Isotonic tests for convex orderings. In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Theory of Statistics, The Regents of the University of California.
- Barlow, R. E. & Campo, R. (1975), Total time on test processes and applications to failure data analysis, In: Reliability and Fault Tree Analysis, SIAM, Philadelphia, PA.
- Bergman, B. & Klefsjö, B. (2014), Total time on test plots, Wiley Stats Ref:

Statistics Reference Online.

Bonferroni, C. (1930), *Elementi di Statistica Generale*, Seeber - Firenze.

Dalton, H. (1920), The measurement of the inequality of incomes. *The Economic Journal*, 30(119): 348-361.

Epstein, B. & Sobel, M. (1953), Life testing, *Journal of the American Statistical Association*, 48(263): 486-502.

Fernandez-Ponce, J. M., Kochar, S. C. & Muñoz-Perez, J. (1998), Partial orderings of distributions based on right-spread functions, *Journal of Applied Probability*, 221-228.

Gini, C. (1912), *Variabilita e mutabilita*, Reprinted in *Memorie di metodologica statistica* (Ed. Pizetti E, Salvemini, T), Rome: Libreria Eredi Virgilio Vesch.

Hurlimann, W. (1998), On stop-loss order and the distortion pricing principle. *ASTIN Bulletin*, 28(1): 119-134.

Kawczak, J., Kulperger, R. & Yu, H. (2009), Equivalent processes of total time on test, Lorenz and inverse Lorenz processes, *Statistics and Probability Letters*, 79(1): 125-130.

Kaigh, W. D. (1999), Total time on test function principal components, *Statistics & Probability Letters*, 44(4): 337-341.

Kleiber, C. & Kotz, S. (2003), *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences* (Vol. 470), John Wiley & Sons.

Kochar, S. C., Li, X. & Shaked, M. (2002), The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions, *Advances in Applied Probability*, 34(4): 826-845.

Li, X. & Shaked, M. (2004), The observed total time on test and the observed excess wealth. *Statistics & Probability Letters*, 68(3): 247-258.

Li, X. & Shaked, M. (2007), A general family of univariate stochastic orders, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(11): 3601-3610.

Lorenz, M. O. (1905), Methods of measuring the concentration of wealth, *Publications of the American Statistical Association*, 9(70): 209-219.

Morillas, P. M. (2005), A method to obtain new copulas from a given one, *Metrika*, 61(2): 169-184.

Murthy, D. P., Xie, M. & Jiang, R. (2004), *Weibull models*(Vol.505), John Wiley and Sons.

Navarro, J., Del Águila, Y., Sordo, M. A. & Suárez-Llorens, A. (2016), Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted

- distributions, Applications to coherent systems, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(2): 529-545.
- Navarro, J. & del Águila, Y. (2017), Stochastic comparisons of distorted distributions, coherent systems and mixtures with ordered components, *Metrika*, 80(6): 627-648.
- Navarro, J. (2018), Stochastic comparisons of coherent systems, *Metrika*, 81(4): 465-482.
- Oancea, B. & Pirjol, D. (2019), Extremal properties of the Theil and Gini measures of inequality, *Quality & Quantity*, 53(2): 859-869.
- Pietra, G. (1915), Delle relazioni tra gli indici di variabilità. C. Ferrari.
- Perez-Ocon, R., Gámiz-Pérez, M. L. & Ruíz-Castro, J. E. (1997), A study of different ageing classes via total time on test transform and Lorenz curves, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 13(3-4): 241-248.
- Pham, T. G. & Turkkan, N. (1994), The Lorenz and the scaled total-time-on-test transform curves: a unified approach, *IEEE Transactions on Reliability*, 43(1): 76-84.
- Rizwan, U., Ahmed, B. T. & Hussainy, S. T. (2018), Transformation Properties of Aging Classes under Excess Wealth Transform.
- Spiroiu, M. A. (2017), Estimation of total time on test for large samples. In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 112, p. 09008), EDP Sciences.
- Theil, H. (1967), *Economics and Information Theory*, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Wang, S. (1995), Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms, *Insurance: Mathematics and Economics*, 17(1): 43-54.
- Wang, S. (1996), Premium calculation by transforming the layer premium density, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 26(1): 71-92.
- Wang, S. (1997), PH-Measure of Portfolio Risks, Chapter 9 of unpublished lecture notes, Risk Measures with Applications in Insurance Ratemaking and Actuarial Valuation. Waterloo, Ont: University of Waterloo.
- Wang, S. S. (2000), A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks, *Journal of Risk and Insurance*, 67: 15-36.
- Yaari, M. E. (1987), The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, 55: 95-115.
- Zenga, M. (1984), Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito, *Giornale Degli Economisti e Annali Di Economia*, 301-326.

Zenga, M. (2007), Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means, *Statistica and Applicazioni*, 5: 3-28.